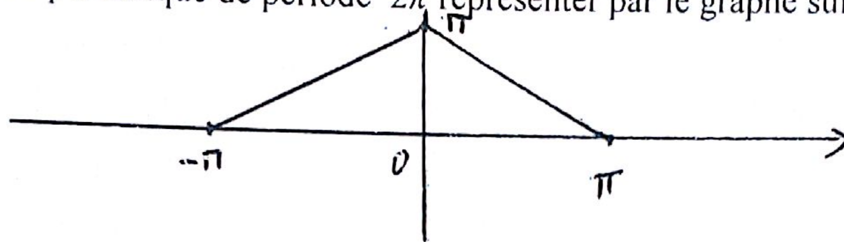
UNIVERSITE MOHAMMED V Année 2014-15

Faculté des sciences, Rabat

Module Analyse 3 Filière SMP

Série #5

Exercice I. 1) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction périodique de période 2π représenter par le graphe suivant :



En déduire la somme de la série $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\pi^4}{96}$.

2) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction périodique de période 2π: $f(x) = |\sin(x)|;\ -\pi < x < \pi$

En déduire la somme de la série $\frac{1}{1^2 3^2} + \frac{1}{3^2 5^2} + \frac{1}{5^2 7^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

ExerciceII. Si $\mathcal{L}(f) = F(s)$, déterminer $f(t)$.

$$1)\ F(s) = \frac{2s+16}{s^2-16}, \quad 2)\ F(s) = \frac{4s-3\pi}{s^2+\pi^2}$$

$$3)\ F(s) = \frac{18s-12}{9s^2-1}, \quad 4)\ F(s) = \frac{4s-2}{s^2-6s-18}$$

ExerciceIII. a) Déterminer $\mathcal{L}(f)$.

1) $f(t) = 5e^{-at}\sin(wt)$, 2) $f(t) = -3t^4 e^{\frac{t}{2}}$; 3) $f(t) = e^{-3t}\cos(\pi t)$.

b) Soit $f(t) = t\sin(wt)$, calculer f' et f''.
En déduire $\mathcal{L}(f)$.

c) En utilisant la tranformée de Laplace, résoudre les équations différetielles suivantes :

$$(1)\begin{cases} y'' + 7y' + 12y = 21e^{3t} \\ y(0) = 3,5, y'(0) = -10. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 50t - 150 \\ y(3) = -4, y'(3) = 14. \end{cases}$$

ExerciceIV. Déterminer la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0,\ a > 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{\ }$ si

UNIVERSITE MOHAMMED V
Faculté des sciences, Rabat Année 2014-15

Module Analyse 3 Filière SMP

Série #5 Indications

Exercice I.

La fonction f est une fonction paire définie sur $[0,\pi]$ par la droite qui passe par les points $(0,\pi)$ et $(\pi,0)$, donc $f(x) = \pi - x$ sur $[0,\pi]$.
Donc

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi - x)dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi - x)\cos(nx)dx = 2\int_0^\pi \cos(nx)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx$$

On a $2\int_0^\pi \cos(nx)dx = \frac{2}{n}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0.$

En intégrant par partie $\int_0^\pi x\cos(nx)dx$, on obtient :

$$\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}dx = \left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^\pi = \left(\frac{\cos(n\pi) - \cos(0)}{n^2}\right)$$

$$\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est paire} \\ -\dfrac{2}{n^2} \text{ si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

Donc $a_n = 0$ si n est paire et $a_n = \dfrac{4}{n^2\pi}$ si n est impaire.

Le développement de Fourier est donné par :

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \ldots\ldots).$$

En déduire la somme de la série $1 + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \dfrac{1}{7^4} + \dfrac{1}{9^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{\pi^4}{96}$.

D'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi(\pi - x)^2dx = \frac{2}{3}\pi^2 = 2(\frac{\pi}{2})^2 + \frac{16}{\pi^2}(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots)$$

Donc :

$$\frac{2}{3}\pi^2 - 2(\frac{\pi}{2})^2 = \frac{1}{6}\pi^2 = \frac{16}{\pi^2}(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots).$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\pi^4}{96}.$$

2) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction périodique de période 2π:

$$f(x) = |\sin(x)|; \quad -\pi < x < \pi.$$

La fonction est paire, on a :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)}{2}dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n-1}\right).$$

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impaire} \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{2}{n+1} - \dfrac{2}{n-1}\right) = \dfrac{-4}{\pi(n-1)(n+1)} \text{ si } n \text{ est paire} \end{cases}$$

Le développement de Fourier est donné par :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1.3}\cos(2x) + \frac{1}{3.5}\cos(4x) + \frac{1}{5.7}\cos(6x)\ldots\ldots\right).$$

D'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \sin^2(x)dx = 1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^23^2} + \frac{1}{3^25^2} + \frac{1}{5^27^2} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

Donc :

$$1-\frac{8}{\pi^2}=\frac{\pi^2-8}{\pi^2}=\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^23^2}+\frac{1}{3^25^2}+\frac{1}{5^27^2}+\dots\dots\dots\right)$$

On obtient:

$$\frac{1}{1^23^2}+\frac{1}{3^25^2}+\frac{1}{5^27^2}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

ExerciceII. Si $\mathcal{L}(f)=F(s)$, déterminer $f(t)$.

1) $F(s)=\dfrac{2s+16}{s^2-16}=2\dfrac{s}{s^2-16}+4\dfrac{4}{s^2-16}$

$$f(t)=2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-16}\right)+4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2-16}\right)=2\cosh(4t)+4\sinh(4t)$$

2) $F(s)=\dfrac{4s-3\pi}{s^2+\pi^2}$

$$f(t)=4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\pi^2}\right)-3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right)=4\cos(\pi t)-3\sin(\pi t).$$

3) $F(s)=\dfrac{18s-12}{9s^2-1}$,

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{18s-12}{9s^2-1}\right)=\frac{18}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-\frac{1}{9}}\right)-\frac{12}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-\frac{1}{3}}\right)$$

$$f(t)=2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-\frac{1}{9}}\right)-4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}}{s^2-\frac{1}{9}}\right)=2\cosh\left(\frac{1}{3}t\right)-4\sinh\left(\frac{1}{3}t\right).$$

4) $F(s)=\dfrac{4s-2}{s^2-6s-18}=\dfrac{4s-2}{(s-3)^2-9-18}=\dfrac{4s-2}{(s-3)^2-27}=\dfrac{4(s-3)+12-2}{(s-3)^2-27}$

$$F(s)=4\frac{(s-3)}{(s-3)^2-(\sqrt{27})^2}+\frac{10}{\sqrt{27}}\frac{\sqrt{27}}{(s-3)^2-(\sqrt{27})^2}$$

Donc:

$$f(t)=4e^{3t}\cosh(\sqrt{27}\,t)+\frac{10}{\sqrt{27}}e^{3t}\sinh(\sqrt{27}\,t)$$

ExerciceIII. a) Déterminer $\mathcal{L}(f)$.

1) $f(t)=5e^{-at}\sin(wt)$,

$\mathcal{L}(f)=5\dfrac{w}{(s+a)^2+w^2}$;

2) $f(t)=-3t^4e^{\frac{t}{2}}$.

$\mathcal{L}(f)=\dfrac{-72}{(s-\frac{1}{2})^5}$

3) $f(t)=e^{-3t}\cos(\pi t)$.

$\mathcal{L}(f)=\dfrac{s+3}{(s+3)^2+\pi^2}$.

b) Soit $f(t)=t\sin(wt)$, calculer f' et f''.

$f'(t)=\sin(wt)+wt\cos(wt)$, $f''(t)=2w\cos(wt)-w^2t\sin(wt)=2w\cos(wt)-w^2f(t)$.

$\mathcal{L}(f'')=.\mathcal{L}(2w\cos(wt)-w^2f(t))\ =2w\dfrac{s}{s^2+w^2}-w^2\mathcal{L}(f)$

De plus, $f(0)=0, f'(0)=0, \mathcal{L}(f'')=s^2\mathcal{L}(f)-0-0=s^2\mathcal{L}(f)$.

Par conséquent, $\mathcal{L}(f'')=.2w\dfrac{s}{s^2+w^2}-w^2\mathcal{L}(f)=s^2\mathcal{L}(f)$..

Donc

$$\mathcal{L}(t\sin(wt))=\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}.$$

c) En utilisant la tranformée de Laplace, résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(1)\begin{cases} y''+7y'+12y=21e^{3t} \\ y(0)=3,5,\ y'(0)=-10. \end{cases}$$

On a :

$$\mathcal{L}(y'' + 7y' + 12y) = s^2\mathcal{L}(y) - 3,5s + 10 + 7s\mathcal{L}(y) - 24,5 + 12\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(21e^{3t}) = \frac{21}{(s-3)}$$

$$(s^2 + 7s + 12)\mathcal{L}(y) = (\tfrac{7}{2}s + \tfrac{29}{2}) + \frac{21}{(s-3)}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{(s-3)(\frac{7}{2}s + \frac{29}{2}) + 21}{(s-3)(s^2 + 7s + 12)} = \frac{\frac{7}{2}s^2 + 4s - \frac{45}{2}}{(s-3)(s^2+7s+12)} = \frac{\frac{7}{2}s^2 + 4s - \frac{45}{2}}{(s-3)(s+3)(s+4)}.$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{2(s-3)} + \frac{1}{2(s+3)} + \frac{5}{2(s+4)}.$$

Donc,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{2(s-3)}) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{2(s+3)}) + \mathcal{L}(^{-1}\frac{5}{2(s+4)}).$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-4t}.$$

$$(2)\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 50t - 150 \\ y(3) = -4, y'(3) = 14. \end{cases}$$

On pose $t = \tau + 3$, on obtient:

$$\mathcal{L}(\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' + 5\tilde{y}) = 50\,\mathcal{L}(\tau)$$

$$((s+1)^2 + 4)\mathcal{L}(\tilde{y}) = -4s + 14 - 8 + \frac{50}{s^2}.$$

$$\mathcal{L}(\tilde{y}) = \frac{10}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{4}{((s+1)^2 + 4)}$$

$$\tilde{y} = 10\tau - 4 + 2e^{-\tau}\sin(2\tau)$$

Donc

$$y = 10(t-3) - 4 + 2e^{-(t-3)}\sin(2(t-3)).$$

ExerciceIV. Déterminer la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0,\ a > 0 \end{cases}.$$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-ax}\, e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(a + iw)}.$$